MAT497 Dönüşümler ve Geometriler Ara Sınav Cevap Anahtarı(04/12/2021)

1.) $T\ .\ .\ .\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 3 \end{cases}$

ötelemesi altında $y^2 + 2y - x = 0$ eğrisinin resmini bulunuz ve her iki eğrinin grafiğini çiziniz. T ötelemesinin geometrik yorumunu yapınız **(20 P.)**.

Çözüm:

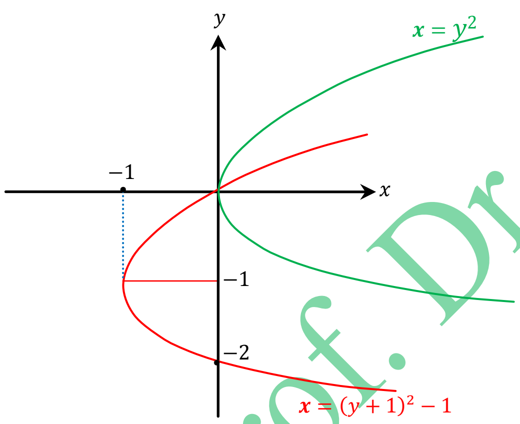
$$T\ .\ .\ .\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 3 \end{cases} \Rightarrow\ T^{-1}\ .\ .\ .\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 3 \end{cases}$$

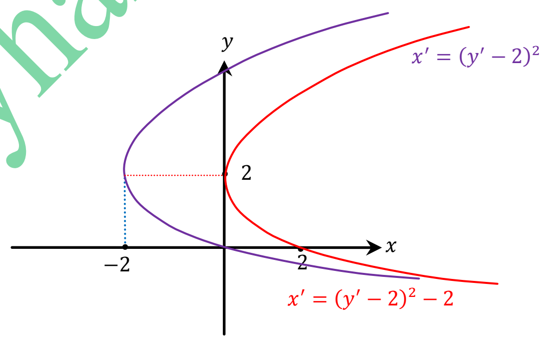
dir.

$y^2 + 2y - x = 0\ \Rightarrow x = y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1$ parabolünde x ve y değerlerini yerlerine yazarsak

$$(y'-3)^2 + 2(y'-3) - (x'+1) = 0 \Rightarrow {y'}^2 - 6y' + 9 + 2y' - 6 - x' - 1 = 0$$
$$\Rightarrow x' = {y'}^2 - 4y' + 2 = (y'-2)^2 - 2$$

parabolü elde edilir. Buna göre, esas eğri ile T ötelemesi altında elde edilen parabollerin grafikleri aşağıdaki gibidir:





T ötelemesi $x = y^2 + 2y$ parabolünü x −ekseni doğrultusunda 1 −birim sola ve y −ekseni doğrultusunda 3 −birim yukarıya ötelemiştir.

2.) Dönme merkezi $(1,0)$ ve dönme açısı $\pi/2$ olan bir dönme ile dönme merkezi $(0,1)$ ve dönme açısı $3\pi/2$ olan dönüşümlerin verilen sıradaki bileşkelerinin denklemini bulunuz. Bu bileşkenin bir öteleme ya da dönme olup olmadığını araştırınız**(50 P.)**.

Çözüm: $O'(h,k)$ noktası etrafında α açılı bir dönme denkleminin

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz. Burada,

$$\begin{cases} a = h(1-cos\alpha) + ksin\alpha \\ b = k(1-cos\alpha) - hsin\alpha \end{cases}$$

dır.

Dönme merkezi $(1,0)$ ve dönme açısı $\pi/2$ olan değerler yukarıda yerlerine yazılır ise

$$R_1 \ldots \begin{cases} x'' = x'cos\frac{\pi}{2} - y'sin\frac{\pi}{2} + 1.\left(1-cos\frac{\pi}{2}\right) + 0.sin\frac{\pi}{2} \\ y'' = x'sin\frac{\pi}{2} + y'sin\frac{\pi}{2} + 0.\left(1-cos\frac{\pi}{2}\right) - 1.sin\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_1 \ldots \begin{cases} x'' = & -y'+1 \\ y'' = & x'-1 \end{cases}$$

elde edilir.

Şimdi $(0,1)$ merkezli ve dönme açısı $3\pi/2$ dönme denklemini bulalım:

$$R_2 \ldots \begin{cases} x' = x\,\overbrace{cos\frac{3\pi}{2}}^{0} - y\,\overbrace{sin\frac{3\pi}{2}}^{-1} + 0.\left(1-cos\frac{3\pi}{2}\right) + 1.sin\frac{\pi}{2} \\ y' = xsin\frac{3\pi}{2} + ysin\frac{3\pi}{2} + 0.\left(1-cos\frac{3\pi}{2}\right) - 0.sin\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_2 \ldots \begin{cases} x' = & y-1 \\ y' = & -x+1 \end{cases}$$

bulunur.

$$R_1R_2 \ldots \begin{cases} x'' = & -(-x+1)+1 \\ y'' = & (y-1)-1 \end{cases} \Rightarrow R_1R_2 \ldots \begin{cases} x' = & x \\ y' = & y-2 \end{cases}$$

bulunur. Bu ise R_1R_2 bileşkesinin, öteleme vektörü $(0,-2)$ olan bir öteleme olduğunu gösterir.

3.) $$L \ldots \begin{cases} x' = 2x - y + 3 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$$

dönüşümü veriliyor. L nin inversi var ise bulunuz**(20 P.)**.

Çözüm:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

olduğundan L^{-1} vardır. L nin denklemlerinden

$$2x - y = x' - 3 \quad \cdots (1)$$
$$-x + y = y' + 1 \quad \cdots (2)$$

bulunur. Bu iki denklemi taraf tarafa toplarsak

$$x = x' + y' - 2$$

ve x değerini (2) denkleminde yerine yazarsak

$$y = x' + 2y' - 1$$

bulunur. Buna göre,

$$L^{-1} \ldots \begin{cases} x = x' + y' - 2 \\ y = x' + 2y' - 1 \end{cases}$$

dir.

4.) Orijin etrafındaki dönmelerin uzaklığı koruyup- korumadığını araştırınız**(20 P.)**.

Çözüm: Orijin etrafındaki α açılı bir dönme denkleminin

$$\begin{cases} x' = xcos\alpha - ysin\alpha \\ y' = xsin\alpha + ycos\alpha \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz.

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ noktalarının resimleri

$P' = R(P) = (x_1cos\alpha - y_1sin\alpha,\ x_1sin\alpha + y_1cos\alpha)$ ve

$Q' = R(Q) = (x_2cos\alpha - y_2sin\alpha,\ x_2sin\alpha + y_2cos\alpha)$

dir. Buna göre,

$$d(P', Q') = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2}$$

$$= \sqrt{(x_2cos\alpha - y_2sin\alpha - x_1cos\alpha + y_1sin\alpha)^2 + (x_2sin\alpha + y_2cos\alpha - x_1sin\alpha - y_1cos\alpha)^2}$$

$$= \left[\big((x_2 - x_1)cos\alpha + (y_1 - y_2)sin\alpha\big)^2 + \big((x_2 - x_1)sin\alpha + (y_2 - y_1)cos\alpha\big)^2\right]^{1/2}$$

$$= \Big[(x_2 - x_1)^2cos^2\alpha + 2(x_2 - x_1)(y_1 - y_2)sin\alpha cos\alpha + (y_1 - y_2)^2sin^2\alpha$$

$$+(x_2 - x_1)^2sin^2\alpha + 2(x_2 - x_1)\underbrace{(y_2 - y_1)}_{-(y_1 - y_2)}sin\alpha cos\alpha + (y_2 - y_1)^2cos^2\alpha\Big]^{1/2}$$

$$= \Big[(x_2 - x_1)^2\underbrace{(sin^2\alpha + cos^2\alpha)}_{1} + \underbrace{(y_2 - y_1)^2}_{(y_1 - y_2)^2 = (y_2 - y_1)^2 old.}\quad (y_2 - y_1)^2\underbrace{(sin^2\alpha + cos^2\alpha)}_{1}\Big]^{1/2}$$

$$\Rightarrow d(P', Q') = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2} = d(P, Q)$$

5.) Bir dönmenin dönme açısı $\pi/2$ ise bu dönmenin her doğruyu kendine dik bir doğruya dönüştürdüğünü gösteriniz**(20 P.)**.

Çözüm: Orijin etrafındaki α açılı bir dönme denkleminin

$$\begin{cases} x' = xcos\alpha - ysin\alpha \\ y' = xsin\alpha + ycos\alpha \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ olduğundan

$$R_o \ldots \begin{cases} x' = & -y \\ y' = & x \end{cases}$$

elde edilir.

$d \cdots y = mx + n$ doğrusunu alalım. d doğrusunun R_o dönmesi arlındaki resmine d' dersek

$d' \quad \cdots -x' = my' + n, m \neq 0, \ \Rightarrow y' = -\frac{1}{m}x' - \frac{n}{m}$

bulunur.

$m_d = m$ ve $m_{d'} = -\frac{1}{m}$ olduğundan $m_d . m_{d'} - 1$. O halde $d \perp d'$ dir.